From Partition to Automorphic forms

Jiahai Wang

July 2024

Contents

1 Jacobi's triple product identity

$$\prod_{r=1}^{\infty}[(1-q^{2r})(1+q^{2r-1}z)(1+q^{2r-1}z^{-1})]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}z^k \quad (|q|<1)$$

Definition: $f(z,q)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-q^{2r}\right)\left(1+zq^{2r-1}\right)\left(1+z^{-1}q^{2r-1}\right)$

We can know

$$f\left(q^2z,q\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left[\left(1-q^{2r}\right)\left(1+q^{2r+1}z\right)\left(1+q^{2r-3}z^{-1}\right)\right]$$

$$=\frac{1+q^{-1}z^{-1}}{1+qz}\prod_{r=1}^{\infty}[(1-q^{2r})(1+zq^{2r-1})(1+z^{-1}q^{2r-1})]$$

$$f(z,q)=qzf\left(q^2z,q\right)$$

另外对其做 Laurent 展开

$$f(z,q)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m(q)\,z^m$$

则根据 $f(z,q)=f\left(z^{-1},q\right)$ 有 $a_m(q)=a_{-m}(q)$ 。代入 Laurent 展开得:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m(q)\,z^m=qz\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m(q)\left(q^2z\right)^m=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{k-1}(q)\,q^{2m-1}z^m$$

对比系数 $a_m(q)=q^{2m-1}a_{m-1}(q)$ ，迭代 m 次

$$a_m(q) = q^{(2m-1)+(2m-3)+\cdots+3+1} a_0(q) = q^{m^2} a_0(q)$$

$$f(z,q) = a_0(q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} z^m$$

我们只需在此基础上证明 $a_0(q) \equiv 1$ 我们只需要研究 f 在特殊值时的性质

$$f(-1,q^4) = \prod_{r=1}^{\infty} [(1-q^{8r})(1-q^{4(2r-1)})^2]$$

$$= \prod_{r=1}^{\infty} \left[\left(1-q^{4(2r)}\right)\left(1-q^{4(2r-1)}\right)\left(1-q^{4(2r-1)]}\right]\right.$$

$$= \prod_{r=1}^{\infty} [(1-q^{4r})(1-q^{4(2r-1)})]$$

$$= \prod_{r=1}^{\infty} \left[\left(1-q^{2(2r)}\right)\left(1-q^{2(2r-1)}\right)\left(1+q^{2(2r-1)}\right)\right]$$

$$= \prod_{r=1}^{\infty} \left[\left(1-q^{2r}\right)\left(1+iq^{2r-1}\right)\left(1+i^{-1}q^{2r-1}\right)\right] = f(i,q)$$

另一方面，有：

$$f\left(-1,q^4\right) = a_m\left(q^4\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{4m^2}(-1)^m$$

$$f(i,q) = a_m(q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} i^m = a_m(q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{(2m)^2} i^{(2m)}$$

观察得到：$a_m(q) = a_m\left(q^4\right)$ $|q| < 1$ 所以当 $k \to \infty$ 时有 $\mathrm{q}^{4^k} \to 0$
$a_m(q)$ 为常数：

$$a_m(q) = a_m(q^{4^k}) = \lim_{k\to\infty} a_m(q^{4^k}) = 1$$

1.1 some special case

用 x^k 代替 x , 用 $-x^l$ 和 x^l 代替 z , 并用 $n+1$ 代替 n , 得到了

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left\{\left(1-x^{2kn+k-l}\right)\left(1-x^{2kn+k+l}\right)\left(1-x^{2kn+2k}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{kn^2+ln}$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left\{\left(1+x^{2kn+k-l}\right)\left(1+x^{2kn+k+l}\right)\left(1-x^{2kn+2k}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{kn^2+ln}$$

令 $k=1, l=0$ 给出

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left\{\left(1-x^{2n+1}\right)^2\left(1-x^{2n+2}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{n^2},$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left\{\left(1+x^{2n+1}\right)^2\left(1-x^{2n+2}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}$$

我们得到了两个来自椭圆函数论的标准公式.

2 Euler's pentagonal–number theorem

2.1 Jacobi' s triple product Proof

$$\phi(x) = \prod_{n \geq 1} (1 - x^n) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} (-1)^s x^{s(3s-1)/2}.$$

Consider Jacobi's triple product identity $z = \sqrt{x}, q = -\sqrt{x^3}$

$$f(-x^{1/2}, x^{3/2}) = \prod_{r=0}^{\infty} [(1 - x^{3r})(1 - x^{1/2} x^{3r-3/2})(1 - x^{-1/2} x^{3r-3/2})]$$

$$= \prod_{r=0}^{\infty} [(1 - x^{3r})(1 - x^{3r-1})(1 - x^{3r-2})]$$

$f\left(-x^{1/2}, x^{3/2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^{3k^2/2+k/2} (-1)^k$

2.2 Combinatorial proof Franklin 1881

Another combinatorial method proof in Euler's pentagonal-number theorem 放在最后画图演示证明

2.3 Automorphic forms proof

在下一章节看到，如果已证明了对于 η 和 ϑ 的变换公式, 那么 (η) 去除右端的 (ϑ) 得到的函数 $F(z)$ 在变换 $z \mapsto z+1$, 及 $z \mapsto -\frac{1}{z}$ 下不变, 那么应用其在 $SL_2(\mathbb{Z}) \setminus H \cup \{i\infty\}$ 上全纯, 于是得到了 $F(z) = 1$

3 Dedekind eta and Δ

Theorem: 对$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12} \Delta(z).$$

即

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \eta(z)$$

3.1 Dedekind 1880

$$\left.\begin{aligned} \eta(z) &= q^{\frac{1}{24}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{(6m-1)^2}{24}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) q^{\frac{n^2}{24}} \end{aligned}\right\}$$

然后应用被称为 ϑ 的自守形式的右端来给出定理的证明.
χ 是 mod 12 的偶特征, 对其定义为

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & m \equiv \pm 1 \bmod 12 \\ -1 & n \equiv \pm 5 \bmod 12 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

它的 Gauss 和 $G(\chi)=2\sqrt{3}$. 我们则有 $\eta(iy)=\psi_\chi(y)$,

$$\varphi_\chi(x)=\sum_{m=1}^{\infty} m\chi(m)\,e^{-\pi x m^2/N}.$$

且由 Poisson 求和公式推导出 $\psi_\chi(y)$ 的变换公式为

$$\psi_\chi\left(\frac{1}{y}\right)=\sqrt{y}\psi_\chi(y)$$

有

$$\eta\left(i\frac{1}{y}\right)=\sqrt{y}\eta(iy)$$

即

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right)=\sqrt{\frac{z}{i}}\eta(z)$$

(它的两边都在上半平面为全纯, 由于在虚轴上相等故在上半平面相等). 作 24 次乘方得到Δ

$$\Delta\left(-\frac{1}{z}\right)=z^{12}\Delta(z)$$

这是对于 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ 的变换, 又因为对 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的另一个生成元 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 的变换

$$\Delta(z+1)=\Delta(z)$$

是显然成立的, 故对于所有的 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ 成立

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^{12}\Delta(z)$$

3.2 Kronecker

根据 Kronecker 极限公式 (我们接下来的模形式讨论班的内容) 知 $\mathrm{Im}(z)^6\,|\Delta(z)|=y^6\,|\Delta(z)|$ 为 $SL_2(\mathbb{Z})$ 不变特别地有

$$y^6\,|\Delta(iy)|=\left(\frac{1}{y}\right)^6\left|\Delta\left(i\frac{1}{y}\right)\right|.$$

由于上式的绝对值里是全为正的实数, 得

$$y^6\Delta(iy)=y^{-6}\Delta\left(i\frac{1}{y}\right)$$

即

$$\Delta\left(-\frac{1}{iy}\right)=(iy)^{12}\Delta(iy)$$

$$\Delta\left(-\frac{1}{z}\right)=z^{12}\Delta(z)$$

3.3 Hurwitz

应用条件收敛级数 $E_2(z)$ 具体参考 GTM 7

References

[1] Hardy Number theory

[2] GTM 7 A Course in Arithmetic

[3] GTM 228 A First Course in Modular Form