Hilbert Space

作者： Jiahai Wang

时间： November 12, 2024

目录

第 1 章 Hilbert 空间 **1**

1.1 内积 1

1.2 Hillbert 空间的基 3

1.3 正交分解 7

1.4 对偶和共轭 10

1.5 Riesz 表示定理的应用 11

第 1 章 Hilbert 空间

1.1 内积

本节主要介绍内积定义, 内积与范数之间的联系.

定义 1.1

$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$.

$$(z, w) := \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{w}_k$$

有性质:

(1) $(\lambda z_1 + \mu z_2, w) = \lambda (z_1, w) + \mu (z_2, w)$

(2) $(z, \lambda w_1 + \mu w_2) = \bar{\lambda} (z, w_1) + \bar{\mu} (z, w_2)$

(1) 与 (2) 合称共轭双线性

(3) 共轭对称性: $(z, w) = \overline{(w, z)}$

(4) 正定性: $(z, z) \geq 0. (z, z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

♣

定义 1.2

X 是线性空间, 映射 $a : X \times X \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto a(x, y) \in \mathbb{K}$.

(1) 若 $a(\cdot, \cdot)$ 满足性质 $(1), (2)$, 称 a 为 X 上的共轭双线性型, 称 $q(x) := a(x, x)$ 为 a 的二次型.

(2) 若 a 满足性质 $(1), (2), (3), (4)$, 称 a 为 X 上的一个内积, $(X, a(\cdot, \cdot))$ 称为内积空间.

♣

例题 1.1 (1) $X = \mathbb{C}^n$

- A 是 Hermitian 方阵, $(x, y) := xA\bar{y}^t$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的共轭双线性型.
- A 是正定 Hermitian 方阵, $(x, y) := xA\bar{y}^t$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的内积.

(2) $X = \ell^2 = \left\{ u = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty \right\}$

$$(u, v) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$$

是 ℓ^2 上的内积.

(3) $X = L^2(\Omega, \mu), (u, v) := \int_\Omega u\bar{v} \,\mathrm{d}\mu$ 是 L^2 内积.

(4) $X = \mathrm{C}^k(\bar{\Omega})$

$$(u, v) := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \partial^\alpha u \overline{\partial^\alpha v} \,\mathrm{d}x$$

是 $\mathrm{C}^k(\bar{\Omega})$ 上的内积.

命题 1.1

二次型 $q(x) = a(x, x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a(x, y) = \overline{a(y, x)}, \forall x, y \in X$

♠

命题 1.2 (Cauchy - Schwarz)

设 a 是 X 上的共轭双线性型, 若二次型 $q(x)$ 满足正定性: $q(x)\ge 0,\forall x\in X$ 且 $q(x)=0\Leftrightarrow x=0$, 那么对 $\forall x,y\in X$ 有

$$|a(x,y)|^2\le q(x)\,q(y)$$

等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关.

证明 不妨设 $y\ne 0$, 则对 $\forall\lambda\in\mathbb{K}$ 有

$$0\le q(x+\lambda y)=q(x)+\lambda a(y,x)+\bar{\lambda}a(x,y)+|\lambda|^2q(y)$$

取 $\lambda=-\frac{a(x,y)}{q(y)}$ 代入上式得

$$0\le q(x+\lambda y)=q(x)-2\frac{|a(x,y)|^2}{q(y)}+\frac{|a(x,y)|^2}{q(y)}$$

$$=q(x)-\frac{|a(x,y)|^2}{q(y)}$$

其中用到了 $a(x,y)=\overline{a(y,x)}$ (因为由假设 $q(x)\ge 0$ 知 $q(x)\in\mathbb{R},\forall x\in X$, 由性质即得). 因此,

$$|a(x,y)|^2\le q(x)\,q(y)$$

等号成立 $\Leftrightarrow x+\lambda y=0$, 即 x,y 线性相关.

[注: 当 $a(\cdot,\cdot)$ 是内积时, 记 $a(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)$, 有 $|(x,y)|^2\le\|x\|^2\ \|y\|^2$, 其中 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, 即常见的 Cauchy-Schwarz 不等式.]

1.1.1 内积与范数

命题 1.3

设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间, 令 $\|x\|:=\sqrt{(x,x)}$, 则 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间.

证明 (i) $\|x\|\ge 0$. $\|x\|=\sqrt{(x,x)}=0\Leftrightarrow x=0$.

(ii) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\|\lambda x\|=\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{|\lambda|^2(x,x)}=|\lambda|\cdot\|x\|$

(iii) 对 $\forall x,y\in X$

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)$$

$$=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)$$

$$=\|x\|^2+2\operatorname{Re}((x,y))+\|y\|^2$$

$$\le\|x\|^2+2|(x,y)|+\|y\|^2$$

$$\le\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2\ \text{(Cauchy - Schwarz)}$$

$$= (\| x \| + \| y \|)^2$$

因此 $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

[注:(1) 内积空间 ⊆ 赋范空间 ⊆ 度量空间

(2) 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.]

命题 1.4

$(X, \| \cdot \|)$ 是赋范空间, $\| \cdot \|$ 是内积诱导的 $\Leftrightarrow \| \cdot \|$ 满足平行四边形法则, 即

$$\| x+y\|^2 + \| x-y\|^2 = 2\left(\| x\|^2 + \| y\|^2\right), \forall x, y \in X$$

1.2 Hillbert 空间的基

本节主要介绍内积空间正交的基本性质, Hilbert 空间基的存在性及性质, 可分 Hilbert 空间的结构.

1.2.1 正交

定义 1.3

$(X, (\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $M \subset X$ 为子集, $x, y \in X$.

(1) 若 $(x, y) = 0$, 称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$.

(2) 若对 $\forall y \in M$, 有 $x \perp y$, 称 x 与 M 正交, 记为 $x \perp M$.

(3) 称 $M^{\perp} := \{x \in X \mid x \perp M\}$ 为 M 的正交补.

命题 1.5

$(X, (\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $M \subset X$, 则 $M^{\perp} \subset X$ 是闭子空间.

证明 (i) $M^{\perp}$ 是线性空间

设 $x, y \in M^{\perp}, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, 则对 $\forall z \in M$ 有

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda (x, z) + \mu (y, z) = 0$$

即 $(\lambda x + \mu y) \perp M$, 或 $(\lambda x + \mu y) \in M^{\perp}$.

(ii) M 是闭的.

设 $x_n \in M^{\perp}, x_n \to x$, 则对 $\forall y \in M$ 有

$$|(x, y)| = |(x - x_n, y) + (x_n, y)|$$

$$= |(x - x_n, y)| \leq \left\| x - x_n \right\| \cdot \| y \| \to 0 \, (n \to \infty)$$

即 $x \perp y, x \in M^{\perp}$.

定义 1.4

$(X, (\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $S := \{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \subset X$, 若 S 满足:

(1) 对 $\forall \alpha, \beta \in \Lambda, e_\alpha \perp e_\beta$.

(2) 对 $\forall \alpha \in \Lambda, \left\| e_\alpha \right\| = 1$.
称 S 是 X 的一个正交规范集.

[注: 若 S 仅满足 (1), 称 S 为正交集. 若正交集 S 满足 $S^\perp = \{0\}$, 称 S 为完备的.]

问题 1.1 完备正交集是否一定存在?

命题 1.6

非零的内积空间一定有完备正交集.

证明 $(X, (\cdot,\cdot))$ 是内积空间, 在 X 的所有正交子集构成的集合 $\mathcal{X}$ 中引入序关系为包含关系. 于是, $\mathcal{X}$ 中任意完全有序子集有上界, 为它们的并. 根据 Zorn 引理, $\mathcal{X}$ 有极大元 S , 则 $S^\perp = \{0\}$. 否则, 存在 $0 \neq x_0 \in S^\perp$, 则 $S \subset \widetilde{S} := S \cup \{x_0\}$, $\widetilde{S}$ 仍是正交集, 与 S 的极大性矛盾.

1.2.2 Hilbert 空间的基

定理 1.1 (Bessel Inequality)

$(X, (\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $S := \{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \subset X$ 为正交规范集, 则对 $\forall x \in X$ 有

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} |(x, e_\alpha)|^2 \le \| x\|^2$$

证明 (i) 上述和是至多可数项求和. 对指标 Λ 的任意有限子集, 不妨记为 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 有

$$0 \le \left\| x - \sum_{i=1}^m (x, e_i)\, e_i \right\|^2$$

$$= \left(x - \sum_{i=1}^m (x, e_i)\, e_i, x - \sum_{i=1}^m (x, e_i)\, e_i \right)$$

$$= \| x\|^2 - 2\sum_{i=1}^m |(x, e_i)|^2 + \sum_{i=1}^m |(x, e_i)|^2$$

$$= \| x\|^2 - \sum_{i=1}^m |(x, e_i)|^2$$

即

$$\sum_{i=1}^m |(x, e_i)|^2 \le \| x\|^2$$

根据估计式, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 满足 $|(x, e_\alpha)| > \frac{1}{n}$ 的指标 α 只有有限个, 从而 $(x, e_\alpha) \neq 0$ 的指标 α 是至多可数个.
(ii) 由 (i), $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda} |(x, e_\alpha)|^2$ 中至多有可数项求和, 结论成立!

推论 1.1

$(X, (\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $S = \{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 中的正交规范集, 则对 $\forall x \in X$ 有

(1) $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda} (x, e_\alpha)\, e_\alpha \in X$

(2) $\left\|x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2$

证明 (1) 由定理的证明, $\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha$ 是至多可数和, 不妨记为

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$$

令 $x_m=\sum_{k=1}^{m}(x,e_k)e_k$, 则对 $\forall p\in\mathbb{N}$ 有

$$\left\|x_{m+p}-x_m\right\|^2=\left\|\sum_{k=m+1}^{k=m+p}(x,e_k)e_k\right\|^2=\sum_{k=m+1}^{m+p}|(x,e_k)|^2$$

由 Bessel 不等式, $\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2\le\|x\|^2$, 因此级数收敛. 由上知, $\{x_m\}\subset X$ 是基本列, 有 $\lim_{m\to\infty}x_m=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k\in X$ 。

(2) 注意到对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 有

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{m}(x,e_k)e_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{m}|(x,e_k)|^2$$

令 $m\to\infty$ 即可.

定义 1.5

$(X,\|\cdot\|)$ 是内积空间, $S=\{e_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ 为 X 的正交规范集, 若对 $\forall x\in X$, 有

$$x=\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha$$

称 S 为 X 的一组正交规范基, $\{(x,e_\alpha)\mid\alpha\in\Lambda\}$ 称为 x 关于 S 的 Fourier 系数.

定理 1.2

$(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $S=\{e_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ 是正交规范集, 下列三条等价:

(1) S 是 X 的正交规范基

(2) S 是完备的

(3) Parseval 等式成立: $\|x\|^2=\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2,\forall x\in X$

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) (反证) 假设 S 不完备, $\exists 0\neq x\in S^\perp$, 则 $(x,e_\alpha)=0,\forall\alpha\in\Lambda$. 但由于 S 是 X 的正交规范基, $x=\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha=0$, 矛盾.

(2) $\Rightarrow$ (3) (反证) 若 $\exists x\in X$, 使得 Parseval 等式不成立, 则有

$$\left\|x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2>0$$

令 $y:=x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\neq 0$, 于是, 对 $\forall\alpha\in\Lambda,(y,e_\alpha)=(x,e_\alpha)-(x,e_\alpha)=0$, 即 $y\in S^\perp$, 与 S 完备矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (1) 注意到

$$\left\|x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2, \forall x\in X$$

若 Parseval 等式成立, 则 $x-\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha=0$, 即 S 为 X 的正交规范基。

例题 1.2 (1) $X=L^2[0,2\pi],(u,v):=\int_0^{2\pi}u\bar{v}\,\mathrm{d}t$

$$S:=\left\{e_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$$

是 $(X,(\cdot,\cdot))$ 的一个正交规范基.

(2) $X=\ell^2:=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mid x_i\in\mathbb{C},\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty\right\}$

$$(x,y):=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\bar{y}_k$$

$S:=\left\{e_n=\left(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n},0,\cdots\right)\mid n=1,2,\cdots\right\}$ 为 ℓ^2 的一组正交规范基.

(3) $X=H^2(D):=\left\{u\text{ 在}D\text{ 上全纯}\,\middle|\,\int_D|u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty\right\}$, $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 为单位圆盘. 规定内积为

$$(u,v):=\iint_D u\bar{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

则 $S:=\left\{u_n=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n\,\middle|\,n=0,1,\cdots\right\}$ 为 $H^2(D)$ 的一组正交规范基.

定理 1.3 (Gram-Schmit 正交化)

线性代数

1.2.3 可分 Hilbert 空间的结构（选读）

定义 1.6

(X,ρ) 是度量空间, 若存在 X 的可数子集 M , 使得 $\bar{M}=X$, 称 X 是可分的.

定义 1.7

$(X_1,(\cdot,\cdot)_1),(X_2,(\cdot,\cdot)_2)$ 为内积空间, 若 $\exists T:X_1\to X_2$ 满足:

(1) T 是线性同构 (既单又满)

(2) 对 $x,y\in X_1$, 有 $(Tx,Ty)_2=(x,y)_1$

称 T 是内积空间 $(X_1,(\cdot,\cdot)_1)$ 到 $(X_2,(\cdot,\cdot)_2)$ 的一个等距同构.

定理 1.4

$(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, 则 X 是可分的 $\Leftrightarrow(X,(\cdot,\cdot))$ 同构于 ℓ^2 或 $\mathbb{K}^n$.

证明 (i) 先证明 $(X,(\cdot,\cdot))$ 是可分 Hilbert 空间 $\Leftrightarrow X$ 有至多可数的规范正交基. $(\Rightarrow)$ 设可数集 $M\subset X$ 稠密, 即 $\bar{M}=X$. 取 M 的一个极大线性无关组

$$M'=\{x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_N\}\ (N=+\infty\text{ 或}N<+\infty)$$

把 M' 中元素 Schmidt 正交化得

$$S=\{e_1,\cdots,e_k,\cdots,e_N\}$$

则有 $\overline{\operatorname{Span} S}=\overline{\operatorname{Span} M'}=X$, 对 $\forall x\in X$, 存在基本列

$$\left\{x_m := \sum_{k=1}^{N} a_{m,k}e_k\right\}$$

使得 $x_m\to x$. 那么对任意 k 固定, $\{a_{m,k}\mid m=1,\cdots,\infty\}\subset\mathbb{K}$ 是基本列 (因为 $|a_{m,k}-a_{n,k}|\le\left\|x_m-x_n\right\|$) , 记 $a_k=\lim\limits_{m\to\infty}a_{m,k}$, 则 $x=\sum\limits_{k=1}^{N}a_ke_k$, 即 S 是 X 的一组规范正交基.

($\Leftarrow$) 设 $S=\{e_1,\cdots,e_N\}$, N 同上, 是 X 的一组规范正交基, 于是, 对 $\forall x\in X, x=\sum\limits_{k=1}^{N}a_ke_k, a_k\in\mathbb{K}$. 取

$$M=\left\{\sum_{k=1}^{N}a_ke_k \,\middle|\, \operatorname{Re}(a_k),\operatorname{Im}(a_k)\in\mathbb{Q}\right\}$$

则 M 可数, 且 M 在 X 中稠密.

(ii) 由 (i), 取 X 的一组规范正交基 $S=\{e_1,\cdots,e_N\}$, $N=\infty$ 或 $N=n<\infty$. 做对应

$$T: X\to\ell^2 \text{ 或} \mathbb{K}^n$$

$$x=\sum_{k=1}^{N}(x,e_k)\,e_k\mapsto((x,e_1),\cdots,(x,e_N))$$

由 Parseval 等式有

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{N}|(x,e_k)|^2\ \forall x\in X$$

由此可见, 对应 T 是 $X\to\mathbb{K}^N$ (当 $N<\infty$) 或 $X\to\ell^2$ (当 $N=\infty$) 的既单又满线性同构. 此外,

$$(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{N}(x,e_i)\,e_i,\sum_{j=1}^{N}(x,e_j)\,e_j\right)=\sum_{i=1}^{N}(x,e_i)\,\overline{(y,e_i)},\forall x,y\in X$$

因此 T 还是保持内积的. 于是当 $N<\infty$ 时, X 同构于 $\mathbb{K}^N$; 而当 $N=\infty$ 时, X 同构于 ℓ^2 .

1.3 正交分解

本节主要介绍 Hilbert 空间中点到闭凸集最佳逼近元的存在性, 由此导出 Hilbert 空间关于闭子空间的分解.

1.3.1 点到闭凸子集的最佳逼近

定义 1.8

(X,ρ) 是度量空间, $x\in X, M\subset X$ 是子集. 若存在 $y\in M$ 使得

$$\rho(x,y)=\inf_{z\in M}\rho(x,z)$$

称 y 是 x 到 M 的最佳逼近元. 此类问题称为最佳逼近问题.

♣

定理 1.5

$(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $x\in X, C\subset X$ 是闭凸集, 则存在唯一 $y\in C$ 使得

$$\| x-y \|=\inf_{z\in C}\| x-z \|$$

证明 (i) 存在性: 不妨设 $x\notin C$, 否则取 $y=x$ 即可. 对 $x\notin C$, 由 C 闭性

$$d=\inf_{z\in C}\| x-z \|>0$$

取 $z_n\in C$ 使得

$$d\leq \left\|x-z_n\right\|\leq d+\frac{1}{n}$$

注意到对 $\forall m,n\in\mathbb{N}$,

$$\left\|z_m-z_n\right\|^2=\left\|(z_m-x)-(z_n-x)\right\|^2$$

$$=2\left(\left\|z_m-x\right\|^2+\left\|z_n-x\right\|^2\right)-4\left\|\tfrac{z_m-x}{2}+\tfrac{z_n-x}{2}\right\|^2 \text{(平行四边形)}$$

$$=2\left(\left\|z_m-x\right\|^2+\left\|z_n-x\right\|^2\right)-4\left\|\tfrac{z_m+z_n}{2}-x\right\|^2$$

$$\leq 2\left(\left(d+\frac{1}{m}\right)^2+\left(d+\frac{1}{n}\right)^2\right)-4d^2\to 0\ m,n\to\infty$$

即 $\{z_n\}\subset C$ 是基本列, 记 $y=\lim\limits_{n\to\infty}z_n\in C$. 在 (3.31) 式中令 $n\to\infty$ 得到

$$d=\inf_{z\in C}\| x-z \|=\| x-y \|$$

(ii) 唯一性: 设 y,y' 满足条件, 则

$$\left\|y-y'\right\|^2=2\left(\| y-x\|^2+\left\|y'-x\right\|^2\right)-4\left\|\tfrac{y+y'}{2}-x\right\|^2$$

$$\leq 4d^2-4d^2=0$$

从而 $y=y'$.

定理 1.6

$(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $C\subset X$ 是闭凸集, $x\in X$, 则 y 是 x 在 C 中最佳逼近元 $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(x-y,y-z)\geq 0$ 或 $\operatorname{Re}(x-y,z-y)\leq 0,\forall z\in C$.

证明 对 $\forall z\in C$, 作线段 $z_t=(1-t)\,y+tz, t\in[0,1]$.

$$\left\|x-z_t\right\|^2=\| (x-y)+t\,(y-z) \|^2$$

$$=\| x-y\|^2+2t\operatorname{Re}(x-y,y-z)+t^2\,\| y-z\|^2$$

令 $\varphi_z(t) = \left\|x - z_t\right\|^2$, 则 y 是 x 在 C 中最佳逼近元, 当且仅当

$$\varphi_z(t) \geq \varphi_z(0) \ \ (\forall z \in C, \forall t \in [0,1])$$

下只需证 $\operatorname{Re}(x-y, y-z) \geq 0\, (\forall z \in C)$ 成立当且仅当红色成立.

$$\varphi_z'(0) = 2 \operatorname{Re}(x-y, y-z)$$

因此, $\operatorname{Re}(x-y, y-z) \geq 0\, (\forall z \in C)$ 成立当且仅当 $\varphi_z'(0) \geq 0$, 又因为

$$\varphi_z(t) - \varphi_z(0) = \varphi_z'(0)\, t + \|\, y - z\|^2 t^2$$

所以 $\varphi_z'(0) \geq 0$ 成立当且仅当红色成立。

1.3.2 正交分解

命题 1.7

$(X, (\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $X_0 \subset X$ 是闭子空间, $x \in X, y$ 是 x 在 X_0 中的最佳逼近 $\Leftrightarrow x - y \perp X_0 - y$. 其中 $X_0 - y \ := \ \{z - y \mid z \in X_0\}$ (还是 X_0 自己)

证明 设 y 是 x 在 X_0 中最佳逼近元, 则对 $\forall w = z - y, z \in X_0$, 有

$$\operatorname{Re}(x-y, w) \leq 0$$

注意到 $-w \in X_0 - y$, 得

$$\operatorname{Re}(x-y, w) \geq 0$$

得

$$\operatorname{Re}(x-y, w) = 0, \ \forall w \in X_0 - y$$

再由 X_0 是线性空间, $\mathrm{i}w \in X_0 - y$, 代入上式得

$$0 = \operatorname{Re}(x-y, \mathrm{i}w) = \operatorname{Im}(x-y, w)$$

由上面得 $(x-y, w) = 0, \forall w \in X_0 - y = X_0$

定理 1.7

$(X, (\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, X_0 是闭子空间, 则对 $\forall x \in X$,

$$x = y + z, y \in X_0, z \in X_0^{\perp}$$

且这种分解唯一, y 称为 x 在 X_0 上的正交投影.

证明 对 $\forall x \in X$, 记 y 是 x 在 X_0 中最佳逼近元,x - y $\perp X_0$, 令 $z = x - y$, 则 $x = y + z, y \in X_0, z \in X_0^{\perp}$. 下证唯一性, 设 $x = y + z = y' + z', y, y' \in X_0, z, z' \in X_0^{\perp}$. 则

$$y - y' = z' - z \in X_0 \cap X_0^{\perp} = \{0\}$$

从而 $y=y', z=z'$.

[注: $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, X_0 是闭子空间, 则$X=X_0\oplus X_0^{\perp}$.]

1.3.3 正交投影算子

定义 1.9

$(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, 设 X_0 是 X 的一个闭线性子空间, 由正交分解定理, $\forall x\in X, x=y+z, y\in X_0^{\perp}, z\in X_0$. 定义 $P:X\to X_0, x\mapsto Px:=z$, 称 P 为 X 到 X_0 的正交投影算子.

命题 1.8

$((X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $\{0\}\neq X_0\subset X$ 是闭子空间, P 是 X 到 X_0 的正交投影算子. 则有

(1) P 是线性算子

(2) $P\in\mathcal{L}(X,X_0)$ 且 $\|P\|=1$

证明 (1) 线性性: 对 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}, x_1,x_2\in X, Px_1=z_1\in X_0, Px_2=z_2\in X_0$.

$$\lambda x_1+\mu x_2=\lambda(Px_1+y_1)+\mu(Px_2+y_2)$$

$$=(\lambda\cdot Px_1+\mu\cdot Px_2)+(\lambda y_1+\mu y_2)$$

由正交分解的唯一性, 有

$$P(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda\cdot Px_1+\mu\cdot Px_2$$

即 P 是线性的.

(2) $\|P\|=1$. 由正交分解, $\forall x\in X$, 有

$$\|x\|^2=\|y\|^2+\|Px\|^2$$

从而 $\|Px\|^2\leq\|x\|^2$, 即 $\|Px\|\leq 1\cdot\|x\|$. 所以 $\|P\|\leq 1$, 又对 $\forall x\in X_0\setminus\{0\}$ 有 $Px=x$, 则 $\frac{\|Px\|}{\|x\|}=1$, 从而 $\|P\|=1$.

1.4 对偶和共轭

1.4.1 Riesz 表示定理

$(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, 任给一个 $y\in X$, 定义 $f_y:X\to\mathbb{K}, x\mapsto(x,y)$, 则 f_y 有性质:

1. 线性性

2. 对 $\forall x\in X, |f_y(x)|=|(x,y)|\leq\|y\|\cdot\|x\|$, 所以 $\left\|f_y(x)\right\|\leq\|y\|$, 即 $f_y\in X^*$ (有界线性泛函全体 $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})=X^*$)

3. $\left\|f_y\right\|=\|y\|$ (特别地, 取 $x=y$) [注记:Hilbert 空间给定一点, 利用内积得到一个有界线性泛函.

问题 1.2 给定 Hilbert 空间上一个有界线性泛函 $f\in X^*$, 是否存在 $y\in X$ 使得 $f=f_y$?

定理 1.8 (Riesz 表示定理:)

$(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $f\in X^*$, 则存在唯一 $y_0\in X$, 使得 $f(x)=(x,y_0), \forall x\in X$ 或 $f=f_{y_0}$.

证明 参看《泛函分析讲义》张恭庆

[注:(1) $\left\|f_y\right\| = \| y \|$;(2)Hilbert 空间上的有界线性泛函全体等同于它自身 (指 Hilbert 空间自己). 因为由 (1) 知存在等距同构.]

1.5 Riesz 表示定理的应用

1.5.1 测度论

定义 1.10

$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, 若存在可测集列 $\{\Omega_n \mid n = 1, 2, \cdot\}$ 使得

(1) $\mu(\Omega_n) < +\infty$

(2) $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$

(3) $\Omega = \bigcup\limits_{n=1} \Omega_n$

称 Ω 关于 μ 是 σ -有限的.

♣

定义 1.11

$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, $(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ 是测度空间, 若对 $\forall E \in \mathcal{B}$ 且 $\mu(E) = 0$, 有 $\nu(E) = 0$, 称 ν 关于 μ 是绝对连续的.

♣

定理 1.9 (Radon - Nikodym 定理)

设 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, $(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ 是两个 σ -有限测度, 且 ν 关于 μ 绝对连续, 即

$$E \in \mathcal{B}, \mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$$

则存在关于 μ 的可测函数 g , 且 $g(x) \geq 0$ a.e. μ , 使得

$$\nu(E) = \int_E g(x) \, \mathrm{d}\mu, \ \forall E \in \mathcal{B}$$

♡

证明 (i) 先证 $\mu(\Omega) < +\infty$ 的情形.

注意到 $L^2(\Omega, (\mu + \nu))$ 关于 $(u, v) := \int_\Omega uv \, \mathrm{d}(\mu + \nu)$ 是实 Hilbert 空间. 定义 $f : L^2(\Omega, (\mu + \nu)) \to \mathbb{R}, u \mapsto f(u) := \int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu$, 则

$$|f(u)| = \left| \int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \left(\int_\Omega 1 \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\mu(\Omega)|^{\frac{1}{2}} \ \| u\|_{L^2(\Omega, \mu)}$$

$$\leq |\mu(\Omega)|^{\frac{1}{2}} \ \| u\|_{L^2(\Omega, \mu + \nu)}$$

于是, f 是 $L^2(\Omega, (\mu + \nu))$ 上的一个有界线性泛函, 根据 Riesz 表示定理, 存在 $v \in L^2(\Omega, (\mu + \nu))$, 使得对 $\forall u \in L^2(\Omega, (\mu + \nu))$ 有

$$\int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega uv \, \mathrm{d}(\mu + \nu)$$

即

$$\int_\Omega u(1 - v) \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega uv \, \mathrm{d}\nu$$

断言: $0 < v(x) \le 1$, a.e. μ .

令 $F := \{x \in \Omega \mid v(x) \le 0\}$, 取 $u(x) = \chi_F(x)$,

$$\mu(F) \le \int_F (1-v)\,\mathrm{d}\mu = \int_F v\,\mathrm{d}\nu \le 0$$

从而 $\mu(F) = 0$.

同样, 令 $G := \{x \in \Omega \mid v(x) > 1\}$, 取 $u(x) = \chi_G(x)$

$$0 \ge \int_G (1-v)\,\mathrm{d}\mu = \int_G v\,\mathrm{d}\nu \ge \nu(G) \ge 0$$

从而 $\int_G (1-v)\,\mathrm{d}\mu = 0$. 又因为 $1 - v(x) < 0, x \in G$. 所以 $\mu(G) = 0$. 因此, $0 < v(x) \le 1, x \in \Omega$, a.e. μ . 令 $g(x) = \frac{1-v(x)}{v(x)}$, 则 $g(x) \ge 0$, a.e. μ , 且 $g(x)$ 关于 μ 可测. 对 $\forall E \in \mathcal{B}$, 取 $u = \frac{\chi_E(x)}{v(x)+\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$\int_\Omega \chi_E(x) \frac{1-v(x)}{v(x)+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \chi_E(x) \frac{v(x)}{v(x)+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}\nu$$

因为 ν 关于 μ 绝对连续, 且 $v(x) > 0$, a.e. μ , 故 $v(x) > 0$, a.e. ν . 由单调收敛定理,

令 $n \to \infty$ 有

$$\int_E g(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_E 1\,\mathrm{d}\nu = \nu(E), E \in \mathcal{B}$$

(ii) 再考虑 $\mu(\Omega) = +\infty$ 的情形.

由 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 是 σ 有限的, 取 $\{\Omega_n\} \subset \mathcal{B}$, 使得 $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \mu(\Omega_n) < \infty, \forall n \ge 1$. 对 $\forall E \in \mathcal{B}$, 由 (i) 知, 存在 μ 可测函数 $g_n(x) \ge 0$, a.e.

$$\int_{E\cap\Omega_n} g_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \nu(E \cap \Omega_n)$$

Bibliography

[1] Erwin Kreyszig—Introductory functional analysis with applications

[2] John B. Conway—A Course in Functional Analysis

[3] Peter D. Lax—Functional Analysis

[4] 泛函分析讲义张恭庆

[5] 实变函数与泛函分析概要郑维行